Astron.
B
c.1
PASC

UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01294594 5

LES

LOIS EMPIRIQUES DU SYSTÈME SOLAIRE

ET LES

HARMONIQUES TOURBILLONNAIRES.

52668. — PARIS, IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
55, quai des Grands-Augustins.

Astron
B

LES

LOIS EMPIRIQUES DU SYSTÈME SOLAIRE

ET LES

HARMONIQUES TOURBILLONNAIRES

PAR

F. BUTAVAND,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
INGÉNIEUR DES PONTS ET CHAUSSÉES.

142611
18|5|17

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1913

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation
réservés pour tous pays.

LES

LOIS EMPIRIQUES DU SYSTÈME SOLAIRE

ET LES

HARMONIQUES TOURBILLONNAIRES.

INTRODUCTION.

On admet difficilement que la répartition des éléments des planètes soit due au hasard. Telles sont, par exemple, la distance au Soleil, l'inclinaison de l'équateur sur l'écliptique, l'excentricité de l'orbite, la densité, la masse, la durée de rotation. Il semble bien qu'il se passe, pour ces quantités, un fait analogue à celui qu'on observe en Chimie, où les propriétés des corps paraissent être des fonctions à période plus ou moins apparente, d'une seule et même variable : le rang de l'élément dans la classification générale ou dans sa famille.

Nous appelons plus spécialement *lois empiriques du système solaire*, des relations établies en dehors de toute théorie cosmogonique et par des méthodes totalement artificielles, permettant d'obtenir avec une approximation plus ou moins grande les éléments des planètes successives en fonction du rang, ou, à la rigueur, en fonction de la distance au Soleil, Mercure étant pris avec le numéro 1 et le Soleil lui-même, le cas échéant, avec le numéro 0.

Nous n'admettons aucune insertion de moyens — simplement parce que nous pouvons nous en passer — entre les termes successifs connus du système solaire : Soleil, (0); Mercure, (1); Vénus, (2); la Terre, (3); Mars, (4); les Astéroïdes, (5); Jupiter, (6); Saturne, (7); Uranus, (8) et Neptune (9).

C'est dans ces conditions que nous avons abordé un problème multiple qui a déjà reçu pour les distances, les inclinaisons des équa-

teurs et les durées de rotation, des solutions très intéressantes (1).

Il est inutile de chercher à exprimer la durée de révolution et le diamètre en fonction du rang puisque ces quantités se déduisent soit de la distance au Soleil par l'effet d'une loi rigoureuse, soit de la masse et de la densité par définition.

Nous présentons les résultats de nos recherches concernant :

1° La distance au Soleil (a), loi limite;
2° L'inclinaison des équations (β);
3° La densité (d);
4° L'excentricité de l'orbite (e);
5° La masse (M);
6° La durée de rotation (T).

Les relations que nous avons trouvées n'impliquent pas la répartition des planètes en catégories, les planètes rétrogrades prenant place dans le rang à la suite des autres.

Quand cela paraissait possible, nous avons cherché à voir ce que donneraient ces lois pour les planètes hypothétiques placées au delà de Neptune. La question ne paraît présenter quelque intérêt que pour les distances.

C'est l'étude de l'atome selon la conception de M. J.-J. Thomson qui nous a conduit à examiner la question des distances planétaires par analogie avec celle des dimensions de l'atome; ces dimensions jouent un rôle important dans l'hypothèse du resserrement de l'anneau extérieur qui nous a permis de formuler la loi des parcours ionisants des rayonnements α successifs du radium (2).

La loi limite des distances nous a servi à établir une expression empirique du poids atomique des corps d'une même famille (3). Elle est assurément bien curieuse cette correspondance atomico-planétaire qui donne les poids atomiques en fonction des éléments du système solaire; en la constatant on se demande presque si les alchimistes n'en avaient pas une notion plus ou moins consciente quand ils faisaient correspondre certains corps simples aux planètes, comme Mars et le fer, Saturne et le plomb, etc. Aujourd'hui encore le nom

(1) E. Belot, *Essai de Cosmogonie tourbillonnaire.*
(2) *Le Radium*, mai 1912.
(3) *Essai sur le mécanisme de la désagrégation des corps radioactifs* (*Le Radium*, février 1913).

de Mercure désigne à la fois une planète et un métal. L'expression planétaire du poids atomique a permis aussi de donner une explication de la dégravation, ou disparition de la masse dans la transformation du radium en hélium et émanation.

Après la question des distances, nous avons abordé successivement celle des inclinaisons des équateurs, des densités planétaires, etc.... Les résultats obtenus ne paraissent pas de nature à être utilisés présentement dans la théorie de l'atome.

Ayant établi les six lois empiriques, nous avons, en les comparant, été conduits à émettre l'hypothèse d'harmoniques dans les vibrations du tube-tourbillon envisagé par M. Belot dans sa belle conception cosmogonique. Nous avons montré comment les lois des densités, des excentricités, des masses peuvent sommairement s'en déduire ou s'y rattacher. Jusqu'à maintenant, il n'avait pas été formulé de loi pour ces quantités, et le problème semblait difficilement abordable. Quelque sommaire que paraisse la justification que nous en donnons, on ne peut s'empêcher de remarquer l'unité et la simplicité de l'idée qui explique des vérifications parfois très approchées et qui permet de justifier facilement toutes les particularités des Astéroïdes concernant la répartition de leurs masses et de leurs excentricités. C'est le cas de rappeler ici ces paroles de M. Belot (1) : « Il n'y a pas d'anomalie dans l'Univers : c'est notre intelligence qui est parfois inadéquate à l'harmonieuse simplicité des phénomènes. » Harmonieuse simplicité, en effet, au sens propre comme au sens figuré, que celle qui, par la considération d'un simple harmonique des vibrations d'un tourbillon, permet d'expliquer les lois qu'on peut enfin assigner aux éléments les plus disparates du système solaire !

1. LES DISTANCES PLANÉTAIRES.

Depuis que les progrès de l'Astronomie ont permis d'évaluer les distances des planètes au Soleil, on a cherché la relation qui existe entre elles.

Képler, au XVII^e^ siècle, voulait voir une étroite parenté entre ce problème et celui de l'inscription des polyèdres réguliers. Au siècle suivant, l'astronome Bode formula une loi qui se traduit par

$$x_n - 4 = 3 \times 2^n,$$

(1) *Essai de Cosmogonie tourbillonnaire*, p. 94.

en admettant que la distance de la Terre au Soleil est représentée par 10.

Établie avant la découverte des astéroïdes, cette loi s'est vérifiée en assignant au groupe des petites planètes la distance 28 (Pallas, 27,7). Il n'en a pas été de même pour Neptune dont la distance est 30,05, alors que la loi de Bode donnerait 38,8. Il n'y a donc rien à tirer de cette loi pour les planètes hypothétiques placées au delà de Neptune.

Récemment, M. Belot a fait connaître une formule

$$x_n - a = (x_1 - a)^n.$$

qui rend bien compte de la réalité moyennant l'interpolation d'un terme encore inconnu entre Mercure et Vénus, et de quatre termes avant Mercure. Toutefois, les distances pour Uranus (17,7 au lieu de 19,1) et pour Neptune (33,1 au lieu de 30,05) ne sont pas encore parfaites. Ajoutons que cette formule a le mérite de se déduire d'une théorie cosmogonique générale.

Nous avons porté nos recherches dans une voie différente, et ayant en vue la détermination hypothétique des distances des planètes transneptuniennes, nous avons cherché une loi qui fût précisément utile pour le cas des planètes éloignées.

Nous avons simplement comparé la distance a aux puissances successives du rang n. La quantité $\frac{n^4}{a}$ a attiré l'attention par l'allure de sa variation. On a :

N°s.	Planètes.	a.	$\frac{n^4}{a}$.
1.	Mercure	3,87	0,258
2.	Vénus	7,23	2,213
3.	Terre	10	8,1
4.	Mars	15,24	16,8
5.	Astéroïdes	28	22,2
6.	Jupiter	52,03	24,91
7.	Saturne	95,39	25,17
8.	Uranus	191,83	21,4
9.	Neptune	300,87	21,8

La variation de la quantité $\frac{n^4}{a}$ est traduite par une courbe qui représente une oscillation amortie, en amplitude comme en élongation, sur la valeur 22,1 environ (*fig.* 1).

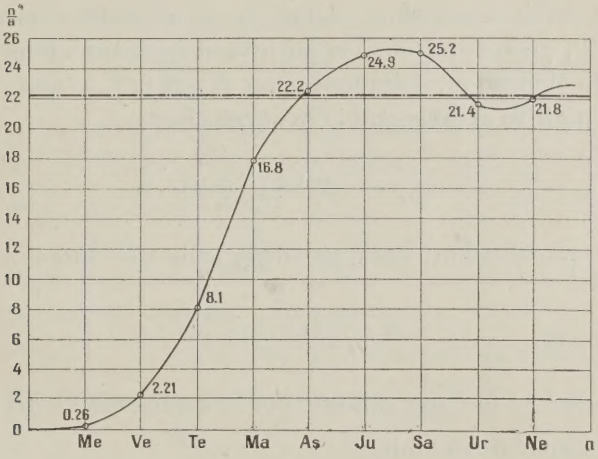
On est donc amené à penser que, pour les planètes très éloignées, la valeur de $\frac{n^4}{a}$ doit être sensiblement constante et égale à 22,1.

On déduit de là les distances suivantes :

	a.
Dixième planète.....	45
Onzième »	66
Douzième »	94

On est arrivé à admettre, depuis quelques années, qu'au delà de Neptune existent deux planètes auxquelles on attribue des perturbations relevées pour Uranus et Neptune. D'après M. Lau pour la

Fig. 1.



dixième planète, et M. Pickering pour la onzième, les distances seraient :

	a.
Dixième planète.....	45
Onzième »	66

La concordance est complète avec les chiffres indiqués ci-dessus. On remarquera que la valeur limite de $\frac{n^4}{a}$ coïncide à peu près avec la valeur de cette expression pour le groupe des astéroïdes.

En résumé, on peut énoncer la loi empirique suivante :

Le rapport de la quatrième puissance du rang d'une planète à sa

distance au Soleil tend, par oscillations amorties, vers une valeur constante, 22,08, qui est à peu près celle du rapport pour les astéroïdes.

Cette loi permet de présumer, par une extrapolation tout indiquée, la distance des planètes transneptuniennes. Il est inutile d'insister sur son caractère empirique et approximatif.

On peut chercher à traduire par une formule la variation de $\frac{n^4}{a}$. Une oscillation non amortie serait représentée par

$$Y = \cos\frac{\varpi}{2} X.$$

Pour tenir compte de l'amortissement en amplitude, la forme de la courbe conduit à introduire auprès de y un facteur correctif de la forme $e^{\varphi(x)}$, φ étant une fonction positive et croissante. Pour l'amortissement en élongation, il faudrait poser $X = \psi(x)$, ψ étant encore une fonction positive et croissante. On aurait ainsi :

$$y = e^{-\varphi(x)} \cos\frac{\varpi}{2} \psi(x).$$

Une approximation assez grossière mais très simple consiste à prendre

$$\varphi(x) \equiv \psi(x) \equiv \left(\frac{n}{5}\right)^2.$$

On a ainsi la formule suivante pour représenter l'écart pour 100, E, de $\frac{n^4}{a}$ autour de sa limite :

$$E = e^{-\left(\frac{n}{5}\right)^2} \cos\frac{\varpi}{2} \left(\frac{n}{5}\right)^2.$$

Nous ne donnons pas cette formule comme apte à représenter les distances planétaires. Nous avons tracé la courbe qu'elle représente, et porté sur la figure les valeurs réelles de $\frac{n^4}{a} - 22,1$. La concordance est loin d'être parfaite, mais elle est cependant curieuse (*fig.* 2).

Nous ne chercherons pas à serrer de plus près les fonctions φ et ψ, en vue de la détermination des distances planétaires.

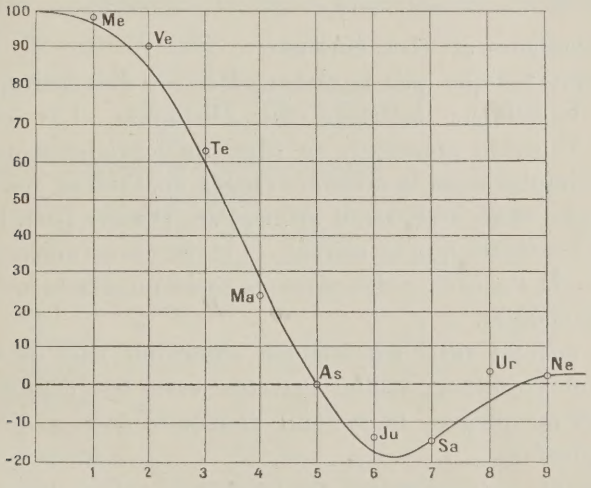
Ce dernier problème est résolu d'une façon satisfaisante par la formule de M. Belot rappelée au début, sauf en ce qui concerne les

deux dernières planètes connues. Pour Uranus et Neptune, ainsi que pour les planètes hypothétiques suivantes, la formule $\frac{n^4}{a} = 22{,}1$ est encore la plus sûre, et c'est surtout sur elle que nous avons voulu attirer l'attention.

L'intérêt de la loi formulée réside dans l'utilisation que nous en avons faite en radioactivité. A la suite de considérations empiriques, nous sommes arrivé à la constatation suivante :

Quand on examine le Tableau des éléments selon Mendéleïeff, on voit que, dans une même famille, la différence des poids atomiques entre

Fig. 2.



deux corps consécutifs, d'abord faible, augmente jusque vers 25, pour diminuer ensuite et se fixer aux environs de 22. On est porté à rapprocher cette variation de celle de $\frac{n^4}{a}$, ou mieux de $\frac{n^2}{a^{\frac{1}{2}}}$.

Nous avons formé un Tableau contenant les valeurs successives de $\frac{n^2}{a^{\frac{1}{2}}}$, puis les sommes constituant la série primitive de la précédente.

Les nombres obtenus, multipliés par un facteur constant $\frac{19}{4}$, correspondent à très peu près aux poids atomiques de la famille du glucinium dans laquelle on a classé le radium :

Planètes.	$\frac{n^4}{a}$.	$\frac{19}{4}\sum\frac{n^2}{a_2^1}$.	Éléments.	Poids atomique.
Mercure.....	0,258	2,4	?	»
Vénus.....	2,213	9,5	Glucinium	9,3
Terre.....	8,1	23	Magnésium	24
Mars.....	16,79	42,4	Calcium	40,4
Astéroïdes.....	22,2	64,8	Zinc	65
Jupiter.....	24,91	88,5	Strontium	88
Saturne.....	25,17	112,4	Cadmium	112
Uranus.....	21,4	134,5	Baryum	137
Neptune.....	21,8	157,7	?	»
Dixième planète..	22,1	179,6	?	»
Onzième » ..	22,1	200,9	Mercure	200
Douzième » ..	22,1	223,3	Radium	226,5

La concordance est assez curieuse.

L'analogie indique qu'à la planète Mercure doit correspondre un élément homologue inférieur du glucinium. Les calculs de M. J.-J. Thomson montrent, en effet, qu'il existerait une rangée d'atomes simples avant la première rangée du Tableau des éléments; cette rangée, il est vrai, serait incomplète. D'autre part, l'existence des corps lourds tel que le mercure et le radium est une présomption empirique de l'existence des planètes correspondantes qui sont les transneptuniennes.

On en conclut aussi, par analogie empirique, que, de même que les éléments chimiques stables s'arrêtent avant les corps radioactifs, à la douzième rangée, le système planétaire doit se limiter à la onzième planète.

En passant, on remarquera que le système solaire que nous connaissons correspond à la famille du glucinium.

2. LA LOI DES INCLINAISONS DES ÉQUATEURS PLANÉTAIRES.

La première formule relative aux inclinaisons des équateurs planétaires a été donnée par M. Belot, comme conséquence de sa théorie cosmogonique :

$$\cot\beta = \frac{K\cos 28^\circ}{x - 0{,}28 - K\sin 28^\circ};$$

dans cette formule x est la distance de la planète au Soleil et K une constante égale à 9,84.

La vérification donne les résultats suivants (¹) :

Planètes.	Distances.	β calculé.	β observé.
Soleil	0	28°	28°
Terre	1	24,10′	23,27′
Mars	1,52	21,14	23,16
Astéroïdes	2,43	15,53	16,40
Jupiter	5,20	2	2,8
Saturne	9,54	28,6	28,6
Uranus	19,2	121,19	98
Neptune	30	109,4	122

Nous avons cherché une relation empirique dans une voie différente, et en comparant x aux lignes trigonométriques de l'angle β nous avons été conduit à poser :

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{tang} \frac{\beta}{2} = \frac{x - 4{,}8}{17}.$$

La vérification donne le résultat suivant :

Planètes.	x.	β calculé.	β réel.
Soleil	0	31°,20′	28°
Terre	1	25	23,27′
Mars	1,52	22	23,16
Astéroïdes	2,43	15,50	16,40
Jupiter	5,20	2,30	2,8
Saturne	9,54	30,50	28,6
Uranus	19,2	82	98
Neptune	30	113	122

La vérification est peu satisfaisante pour les deux dernières planètes, cependant elle ne révèle pas d'inversion pour les chiffres d'Uranus et de Neptune comme avec la formule précédente.

On voit que, pour une planète très éloignée, l'axe tend à redevenir normal à l'écliptique, la rotation ayant lieu dans le sens rétrograde, car $\frac{\beta}{2}$ tend vers $\frac{\varpi}{2}$ et β vers ϖ.

Ce résultat paraît naturel si l'on tient compte des angles mesurés pour Uranus et Neptune.

La formule rappelée au début montrerait que c'est β qui tend vers $\frac{\varpi}{2}$, ce qui est peut-être moins plausible.

(¹) Belot, *Essai de Cosmogonie tourbillonnaire.*

La formule (1) ne mérite pas autrement d'attirer l'attention. Cependant on peut l'améliorer beaucoup en ce qui concerne les deux dernières planètes, pour lesquelles le dénominateur 17 est trop fort.

De la formule (1) on déduit, en appelant a le dénominateur,

$$\text{tang } \beta = \frac{2a(x-4,8)}{a^2-(x-4,8)^2};$$

modifions tang β par un facteur $\frac{b}{a}$, on aura

$$\text{tang } \beta = \frac{2b(x-4,8)}{a^2-(x-4,8)^2},$$

on prendra

$$a = 14,$$
$$b = 11,$$

en posant $\xi = x - 4,8$, on aura donc

$$\text{(2)} \qquad \text{tang } \beta = \frac{22\xi}{14^2 - \xi^2}.$$

La vérification de cette formule donne le résultat suivant :

Planètes.	ξ.	β calculé.	β observé.
0. Soleil.....	4,8	31°,23′	28°
3. Terre.....	3,8	23,24	23,27′
4. Mars	3,28	21	23,16
5. Astéroïdes.....	2,37	15,31	16,40
6. Jupiter	0,4	2,30	2,8
7. Saturne.....	4,7	30,40	28,6
8. Uranus	14,4	92	98
9. Neptune.....	25,2	128	122

La formule dépend de trois constantes.

L'écart moyen absolu est de 2°,5 environ, soit 5 pour 100 de la valeur moyenne de β, et les valeurs obtenues par les deux dernières planètes constituent une vérification admissible. C'est le seul avantage que présente la formule sur celle donnée par M. Belot.

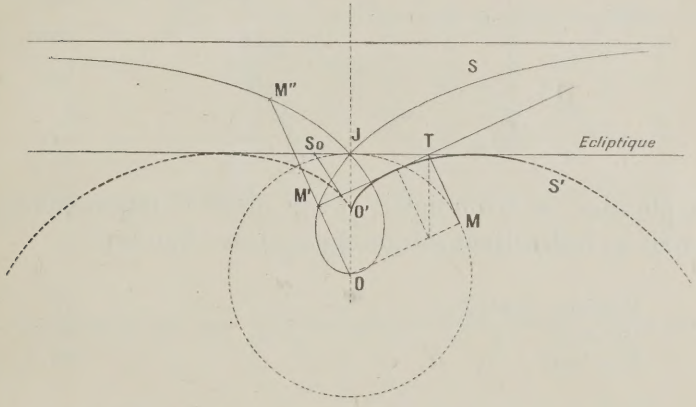
Les formules (1) et (2) sont susceptibles d'une traduction géométrique très simple :

Nous prenons comme plan de la figure un plan normal à l'écliptique et contenant les planètes supposées en ligne droite; les équateurs sont supposés normaux audit plan.

Dans ces conditions, la formule (1) signifie simplement que l'équateur est représenté par la tangente menée par la planète au cercle de rayon 17 tangent à la ligne des planètes au point 4,8 voisin de Jupiter.

On en conclut que l'enveloppe des axes des planètes serait, avec la formule (1), la podaire négative de la ligne des planètes par rapport aux tangentes du cercle en question. Soient O le centre du cercle, MT une tangente, la parallèle par le point O à MT coupe l'axe en un point M′ qui décrit une strophoïde S d'après la définition graphique même de cette courbe. L'enveloppe des axes est donc la podaire

Fig. 3.



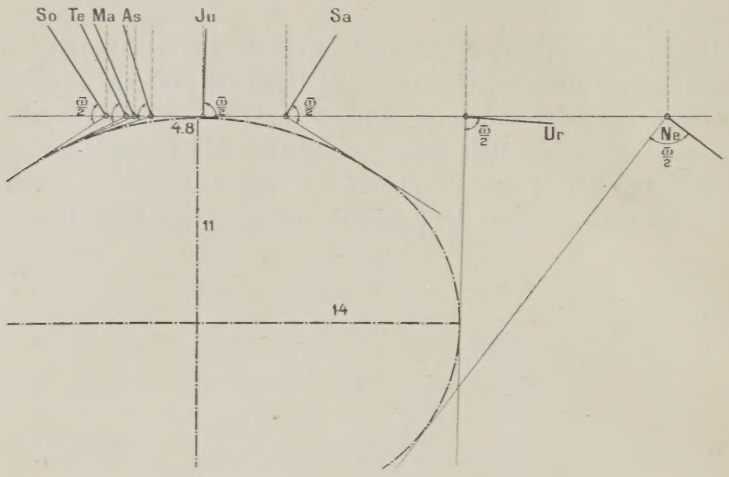
négative de cette strophoïde par rapport à son sommet O. Comme S est anallagmatique pour O, on voit qu'en somme l'enveloppe cherchée est une courbe de la troisième classe et du quatrième ordre polaire réciproque de la strophoïde par rapport à son sommet. Cette courbe S′ présente deux branches paraboliques infinies et un point de rebroussement au milieu de OJ (*fig.* 3).

La formule (2) indique qu'il suffit de ramener le cercle au rayon 14 et de réduire ensuite les ordonnées des tangentes dans le rapport de 14 à 11 pour avoir les traces des équateurs.

En définitive, on peut dire que l'équateur d'une planète est déterminé par la tangente menée à une ellipse dont les axes sont 14 et 11, et qui est tangente à l'écliptique au point 4,8, voisin de Jupiter, en un des sommets de son petit axe.

Nous donnons (*fig.* 4) la construction géométrique correspondante.

Fig. 4.



L'application de la formule (2) aux planètes transneptuniennes donnerait les inclinaisons suivantes pour leurs équateurs :

Dixième planète	148°
Onzième »	160
Douzième »	166

3. LA LOI DES DENSITÉS.

La densité des différentes planètes varie dans des limites assez étendues, ainsi que le montre le Tableau suivant :

0. Soleil	1,36	6. Jupiter	1,30
2. Vénus	4,35	7. Saturne	0,69
3. Terre	5,50	8. Uranus	1,05
4. Mars	3,83	9. Neptune	1,62

Pour Mercure, dont plusieurs éléments sont encore imparfaitement connus, la densité a été estimée à des valeurs assez variables et primitivement considérables.

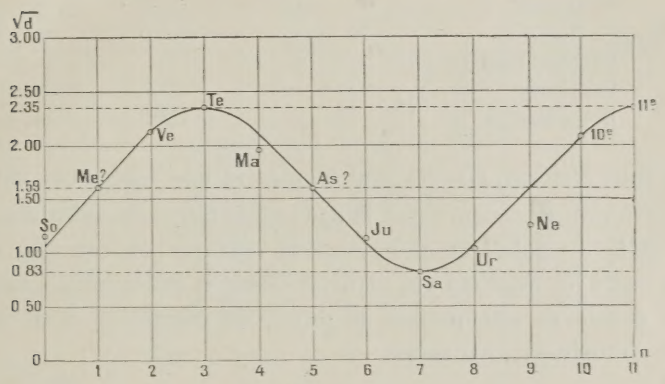
Ainsi, il n'y a pas encore bien longtemps, on lui assignait une densité égale à près de trois fois (2,95) celle de la Terre, soit plus de 15.

Puis, on admit le chiffre 1,38 correspondant à une densité absolue de 7,5.

Aujourd'hui, la masse de Mercure n'est pas encore fixée d'une façon définitive, mais la densité est descendue à 1,14 environ de celle de la Terre. En présence de cette indécision, nous laisserons de côté le cas de Mercure.

Nous avons reconnu que la racine carrée de la densité est à peu

Fig. 5.



près représentée par une fonction sinusoïdale simple. On a en effet, pour $\sqrt{d}$:

0. Soleil.....	1,17	6. Jupiter.....	1,16
2. Vénus.....	2,10	7. Saturne.....	0,83
3. Terre.....	2,35	8. Uranus.....	1,02
4. Mars.....	1,96	9. Neptune.....	1,29

Si l'on porte en abscisses le rang n et en ordonnées $\sqrt{d}$, on voit que les points obtenus sont voisins d'une sinusoïde comprise entre les ordonnées 2,35 et 0,83, dont l'amplitude est par suite 1,52, et qui a pour période huit rangs. Son ordonnée moyenne correspond à $n = 5$ (*fig.* 5).

On a la relation

$$y = \sqrt{d} = 1{,}59 + 0{,}76 \cos \frac{\varpi}{4} (n - 3).$$

La vérification donne les résultats suivants :

Planètes.	$\sqrt{d}$ admise.	$\sqrt{d}$ calculée.	Écart pour 100.
0. Soleil	1,17	1,10	6
1. Mercure	»	1,59	»
2. Vénus	2,10	2,17	3
3. Terre	2,35	2,35	0
4. Mars	1,96	2,17	10
5. Astéroïdes	»	1,69	»
6. Jupiter	1,14	1,10	4
7. Saturne	0,83	0,83	0
8. Uranus	1,02	1,10	8
9. Neptune	1,29	1,59	20
Dixième planète	»	2,17	»
Onzième »	»	2,35	»
Douzième »	»	2,17	»

Sur huit vérifications, six sont bonnes et une seulement est mauvaise. On doit remarquer que la densité de Neptune serait théoriquement celle du Soleil et qu'après cette planète on retrouve dans le même ordre les densités des planètes connues : Mercure, Vénus, etc.

On considère quelquefois la durée de révolution d'un satellite limite, donnée par la formule

$$t = 3,27\, d^{-\frac{1}{2}},$$

on en déduit que la vitesse angulaire des satellites limites est représentée par la sinusoïde trouvée.

L'intérêt de la formule trouvée réside surtout dans la périodicité qu'elle indique.

4. LA LOI DES EXCENTRICITÉS.

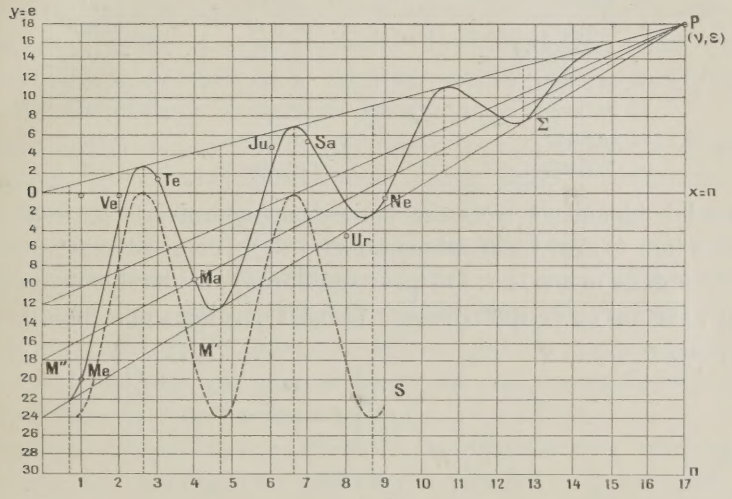
Nous avons cherché une relation empirique entre l'excentricité absolue de l'orbite et le rang de la planète, et nous avons tâché, comme pour la loi des densités, de mettre en évidence une fonction sinusoïdale.

Si l'on porte en abscisse le rang et en ordonnée l'excentricité, il paraît difficile de dégager une loi régulière de la figure obtenue. Mais nous avons pensé qu'il n'y avait aucune raison pour ne pas supposer que l'excentricité, à l'occasion, pût revêtir la forme négative, car le signe dépend simplement du côté par lequel on considère l'orbite.

En donnant aux excentricités de la Terre, de Jupiter et de Saturne

des valeurs de signe contraire aux autres, on obtient des points que l'on peut relier approximativement par une courbe remarquable. Cette courbe est une sinusoïde Σ, à période constante de quatre rangs, et dont l'amplitude décroît suivant une loi linéaire. La courbe est comprise entre deux tangentes multiples qui se coupent au point P de coordonnées : $\nu = 17$, $\varepsilon = 0{,}18$; ces tangentes rencontrent Oy : l'une à l'origine, l'autre au point $-0{,}24$ environ (*fig.* 6).

Fig. 6.



Il est facile de voir comment Σ se déduit de la sinusoïde régulière S, qui a pour équation

$$E = -0{,}12\left[1 + \cos\frac{\varpi}{2}\left(n - \frac{2}{3}\right)\right].$$

Soit M′ un point de S. On le projette sur Oy et l'on joint le point M″ obtenu au vertex P. La droite PM″ rencontre l'ordonnée de M′ en un point M*a* dont le lieu est Σ.

Nous indiquons sur l'épure, à côté des points théoriques ainsi obtenus pour Σ, les points qui résultent de la mesure des excentricités. La concordance est assez curieuse. De la figure on déduit facilement la formule

$$e = \frac{n}{\nu}\varepsilon - \left(1 - \frac{n}{\nu}\right)\lambda\left[1 + \cos\frac{\varpi}{2}\left(n - \frac{2}{3}\right)\right],$$

où il faut faire

$$\varepsilon = 0,18,$$
$$\nu = 17,$$
$$\lambda = 0,12.$$

La vérification donne les résultats suivants :

Planètes.	e réelle.	e calculée.
1. Mercure	0,205	— 0,20
2. Vénus	0,0068	— 0,03
3. Terre	0,016	+ 0,017
4. Mars	0,093	— 0,090
5. Astéroïdes	0,133	— 0,104
6. Jupiter	0,048	+ 0,025
7. Saturne	0,056	+ 0,062
8. Uranus	0,046	— 0,01
9. Neptune	0,009	— 0,01

La loi dépend de trois constantes, sans compter la période. Elle donne lieu à neuf vérifications, dont cinq très approchées, une passable et deux mauvaises. On peut améliorer considérablement la formule, surtout en ce qui concerne les sept dernières planètes; il suffit de poser

$$e = \frac{n}{\nu}\varepsilon - \left(1 - \frac{n}{\nu}\right)\lambda\left[1 + \cos 2\varpi \frac{\left(n - \frac{1}{2}\right)}{4,5}\right]$$

avec

$$\varepsilon = 0,11, \qquad \nu = 12,5, \qquad \lambda = 0,15,$$

ce qui revient à modifier et déplacer la courbe S (*fig.* 7). On obtient

Planètes.	e calculée.	e réelle.
3. Terre	+ 0,019	0,016
4. Mars	— 0,084	0,093
5. Astéroïdes	— 0,135	0,133
6. Jupiter	— 0,048	0,048
7. Saturne	+ 0,058	0,056
8. Uranus	+ 0,044	0,046
9. Neptune	+ 0,006	0,009

La vérification est très satisfaisante. Pour Mercure, la formule donne 0,235 au lieu de 0,205, ce qui est une vérification admissible. Pour Vénus, par contre, la formule donne 0,045, ce qui correspond bien, à vrai dire, à une excentricité faible, mais cependant beaucoup plus grande que l'excentricité réelle 0,007.

Avec la première représentation, on voit que les excentricités des planètes se groupent par paires alternativement situées à peu près sur deux droites passant par le vertex : en haut, Vénus et la Terre, Jupiter et Saturne; en bas, Mercure, puis Mars et les Astéroïdes, enfin Neptune et Uranus.

Avec la deuxième représentation les alignements sont, en haut : Vénus, la Terre, Saturne et Uranus; en bas : Mercure, Mars, Jupiter et Neptune.

Pour $n = 5$, ce qui correspond aux Astéroïdes, on a pour Σ une ordonnée égale à 0,104 dans le premier cas et à 0,135 dans le deuxième. Or les 79 petites planètes dont l'inclinaison sur l'écliptique est moindre que $3^\circ\frac{1}{2}$, ont une excentricité moyenne égale à 0,133. C'est là une vérification remarquable.

Dans un cas comme dans l'autre, on voit qu'au delà de Neptune il n'y aurait que des excentricités de même signe, et croissant, en moyenne, suivant une droite, la même à très peu près, qui passe par le point ($e = 40$, $n = 9$) et a un coefficient angulaire de 2 environ.

De l'examen des courbes il résulte qu'il y a trois régions où les excentricités sont faibles ou nulles : 1° aux environs de Vénus et la Terre, un peu après la première, un peu après la seconde; 2° aux environs de Jupiter, soit un peu avant, soit un peu après cette planète; 3° aux environs de Neptune.

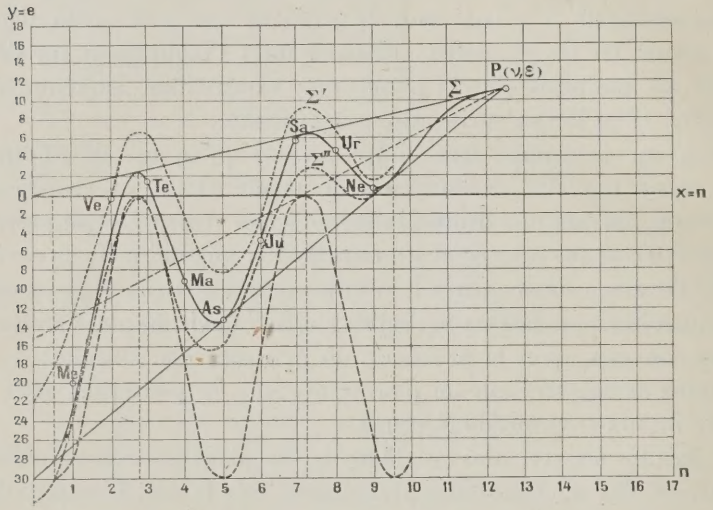
A part les masses, tous les éléments des planètes sont variables et reçoivent des modifications périodiques très lentes. L'amplitude de ces variations est assez forte pour les excentricités dont voici les limites, d'après Stockwell :

Planètes.		
Mercure	0,231	0,121
Vénus	0,070	0
Terre	0,069	0
Mars	0,14	0,028
Jupiter	0,06	0,025
Saturne	0,084	0,012
Uranus	0,077	0,011
Neptune	0,014	0,003

On vérifie facilement que tous les maxima, de même que tous les minima, en leur conservant le signe attribué au graphique des figures 6 et 7, sont situés sur deux courbes Σ' et Σ'' de même définition

et de même période que Σ, qui correspondent aux positions extrêmes de celle-ci. On en conclut que les coordonnées du vertex et les coefficients angulaires des tangentes multiples sont non pas des constantes absolues, mais des fonctions périodiques du temps, à variation très lente. Mais la figure montre que le vertex est très sensiblement fixe, de même que l'ouverture de la courbe sur les ordonnées. En définitive, on peut en gros considérer que les seuls éléments variables de

Fig. 7.



la courbe sont les coefficients angulaires m, m' des tangentes multiples qui sont les fonctions périodiques du temps à variation lente, et qui sont au surplus reliés par la condition

$$m - m' = \text{const.}$$

Le cas actuel de la tangente commune supérieure passant par l'origine résulte d'une coïncidence fortuite.

5. LA LOI DES MASSES.

De tous les éléments des planètes, la masse est certainement celui dont la suite est plus disparate, et il paraît *a priori* difficile de lui assigner une loi.

Nous avons comparé le rang n aux puissances décroissantes de M

et le graphique représentant les valeurs successives de $M^{\frac{1}{8}}$ a retenu notre attention par son allure.

On a :

	Planètes.	M.	$M^{\frac{1}{8}}$.
1.	Mercure	»	»
2.	Vénus	0,79	0,97
3.	Terre	1	1
4.	Mars	0,105	0,75
5.	Astéroïdes	»	»
6.	Jupiter	309,8	2,05
7.	Saturne	91,9	1,75
8.	Uranus	13,5	1,38
9.	Neptune	16,5	1,42

Pour Mercure, dont plusieurs éléments sont encore mal connus, la masse a été fixée à différentes valeurs, qui ont d'ailleurs été en diminuant jusqu'à maintenant, corrélativement avec les variations de l'estimation de la densité de cette planète, dont nous avons déjà parlé. La masse, pour ne parler que de chiffres relativement récents, a été estimée à 0,068, puis 0,061, et en dernier lieu l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* indique que la masse est comprise entre $\frac{1}{4000000}$ et $\frac{1}{10000000}$ de celle du Soleil, soit entre 0,08 et 0,033 correspondant à des densités de 7 et de 3,1.

Nous avons vu que la loi des densités donnerait pour Mercure $d = 3,3$ environ. Ce chiffre correspond à une masse de 0,035 qui coïncide à peu près avec la limite inférieure de la masse indiquée ci-dessus. C'est ce chiffre que nous admettrons et nous prendrons :

		M.	$M^{\frac{1}{8}}$.
1.	Mercure	0,035	0,65

Nous avons reconnu que les points représentatifs de $M^{\frac{1}{8}}$ sont situés sur une courbe de même définition que celles trouvées pour les excentricités. On a une sinusoïde Σ à période constante de quatre rangs, et dont l'amplitude augmente suivant une loi linéaire, le vertex étant au point : $\mu = 0,40$, $\nu = -0,09$ (*fig.* 8).

Si l'on appelle γ le coefficient angulaire de la médiane, δ celui de la tangente multiple supérieure, on peut écrire

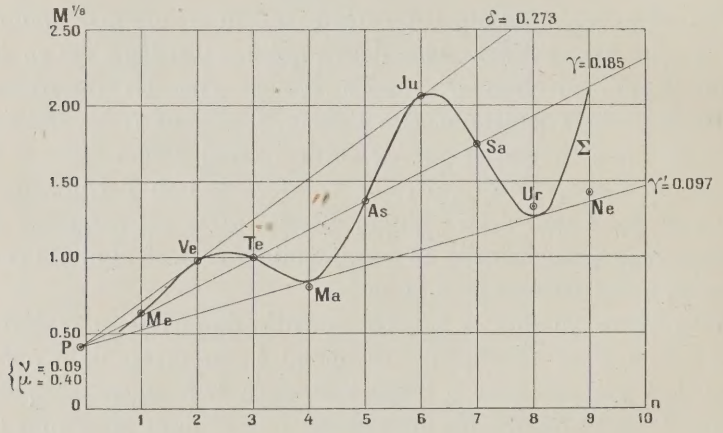
$$M^{\frac{1}{8}} = \mu + (n + \nu)\left[\gamma + (\delta - \gamma)\sin\frac{\varpi}{2}(n - 1)\right]$$

formule dans laquelle il faut faire

$$\mu = 0,40,$$
$$\nu = 0,09,$$
$$\gamma = 0,185,$$
$$\delta - \gamma = 0,088.$$

Graphiquement, il n'y a même pas besoin de tracer la courbe, puisque la médiane et les deux tangentes multiples contiennent tous les points représentatifs. On a ainsi, en beaucoup plus simple, des alignements sur le vertex, comme dans le cas des excentricités : Vénus et Jupiter, en haut; Mercure, la Terre, les Astéroïdes et

Fig. 8.



Saturne sur la médiane et en progression arithmétique; Mars, Uranus et Neptune, en bas.

La formule ne vérifie pas le cas de Neptune, mais, pour les autres planètes, elle donne les résultats suivants :

	Planètes.	$M^{\frac{1}{8}}$ calculé.	$M^{\frac{1}{8}}$ connu ou admis.
1.	Mercure	0,61	0,65
2.	Vénus	0,97	0,97
3.	Terre	0,98	1,00
4.	Mars	0,79	0,75
5.	Astéroïdes	1,34	»
6.	Jupiter	2,06	2,05
7.	Saturne	1,72	1,75
8.	Uranus	1,19	1,38

Sur sept vérifications, il y en a six qui sont en somme très satisfaisantes.

Il n'y a pas lieu de chercher ce que peut donner cette loi pour les planètes transneptuniennes. Pour les Astéroïdes, elle donnerait une masse égale à 10.

Le total des masses des Astéroïdes connus est très loin d'être égal dix fois à la masse de la Terre; il n'est pas certain que la masse totale de la matière planétaire entre Mars et Jupiter corresponde à ce chiffre de 10.

6. LA LOI DES ROTATIONS.

Jusqu'à ces derniers temps, on ne connaissait la durée de rotation T que pour quatre planètes :

		h m
3.	Terre	23.56
4.	Mars	24.37
6.	Jupiter	9.56
7.	Saturne	10.14

M. Belot a donné la formule suivante qui permet d'évaluer T en fonction de la distance a au Soleil, du diamètre D et de la densité d :

$$T = \frac{23.75}{\sqrt{a}\, D^{\frac{1}{2,7}}} + \frac{0,61\, D}{\sqrt{d}};$$

cette formule contient trois constantes; elle vérifie bien les valeurs ci-dessus; elle donne en effet :

		h m
3.	Terre	24.00
4.	Mars	24.28
6.	Jupiter	10. 7
7.	Saturne	10. 9

Elle donne pour Mercure $55^h 7^m$ et pour Vénus $28^h 13^m$. Elle ne s'applique pas aux planètes rétrogrades.

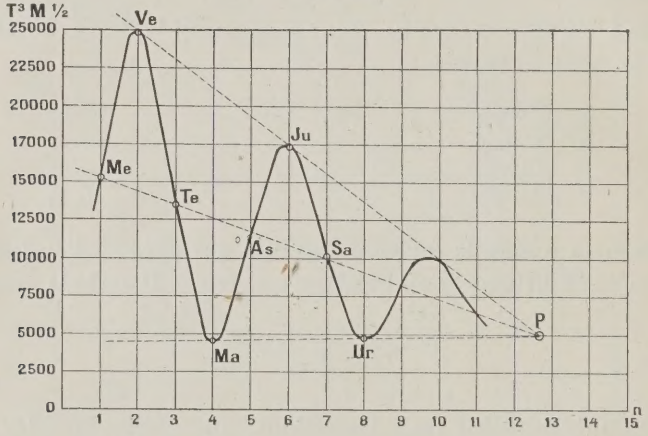
On ne connaît pas la durée de rotation de Neptune ni celle d'Uranus; mais par la considération d'un satellite limite, M. Flammarion d'abord, M. Belot ensuite, sont arrivés à les estimer par le calcul. Ils ont obtenu :

		M. Belot.	M. Flammarion.
		h m	h m
8.	Uranus	10.25	10.40
9.	Neptune	10. 7	11

Nous nous en tiendrons aux chiffres de M. Flammarion.

On ne connaît pas non plus la durée de rotation de Mercure ni de Vénus. Cependant on a annoncé dernièrement pour celle-ci une rotation de 29 heures environ, ce qui vérifierait les prévisions de M. Belot. Ce chiffre résulte, non de mesures directes du temps, mais de l'observation du déplacement des raies spectrales des bords de la planète; il peut être affecté d'une erreur de 2 heures. Nous le laisserons de côté. Nous disposons donc de six données pour chercher une relation empirique. A première vue, il semble bien que, dans l'ensemble, la

Fig. 9.



durée de rotation varie en sens inverse de la masse. En effet, en prenant la courbe de $M^{\frac{1}{8}}$ et en traçant la courbe aux ordonnées inverses avec une puissance égale à 24, on obtient une courbe qui ressemble beaucoup comme allure à celle des rotations.

Nous avons reconnu que le produit $T \times M^{\frac{1}{6}}$ présente des oscillations de période égale à 4, qui vont en s'amortissant (*fig.* 9). On a :

	Planètes.	T.	$M^{\frac{1}{6}}$.	$T \times M^{\frac{1}{6}}$.
3.	Terre.....	24	1	24
4.	Mars.....	24,60	0,686	16,72
6.	Jupiter.....	9,90	2,60	25,74
7.	Saturne.....	10,23	2,12	21,60
8.	Uranus.....	10,67	1,544	16,147
9.	Neptune.....	11	1,60	17,6

On peut représenter approximativement la variation du produit par la formule

$$T^3 \times M^{\frac{1}{2}} = 13\,800 - 938(n-3) + 960(12{,}5 - n)\sin\frac{\pi}{2}(n-3).$$

La vérification donne :

	Planètes.	T calculée.	T observée ou admise.
		h m	h m
3.	Terre	23.59	23.56
4.	Mars	24.25	24.37
6.	Jupiter	9.57	9.56
7.	Saturne	10.12	10.14
8.	Uranus	10.50	10.40
9.	Neptune	12.30	11

Les vérifications sont très satisfaisantes pour les cinq premières planètes; pour la dernière la vérification est médiocre. Pour les quatre premières planètes dont la durée est connue par des mesures directes, l'écart moyen est 4 minutes et demie; la formule de M. Belot rappelée au début donne un écart moyen de 7 minutes et demie.

La formule ci-dessus donnerait pour les deux premières planètes du système :

		T.	
1.	Mercure	44^h	(en admettant M = 0,035)
2.	Vénus	$29^h 9^m$	

Il n'y a pas lieu de tenir compte du résultat qu'elle peut donner pour les Astéroïdes.

7. LA PÉRIODICITÉ PLANÉTAIRE ET LES HARMONIQUES.

Si nous mettons à part la formule des distances qui traduit seulement une loi limite, et celle des inclinaisons des équateurs qui n'est au fond qu'une variante de celle présentée par M. Belot, nous voyons que les lois auxquelles nous sommes arrivé contiennent des termes périodiques exprimés par des fonctions circulaires.

Pour les densités, le terme est

$$\cos\frac{\pi}{4}(n-3),$$

il correspond à une période de huit rangs et la Terre est à un maximum.

Pour les excentricités, le terme est

$$\cos\frac{\varpi}{2}\left(n-\frac{2}{3}\right) \qquad \text{ou} \qquad \cos\frac{2\varpi}{4,5}\left(n-\frac{1}{2}\right),$$

la période est de quatre rangs ou quatre rangs et demi; un sommet est compris entre Vénus et la Terre; Saturne est voisin du sommet suivant.

Pour les masses, le terme périodique est

$$\sin\frac{\pi}{2}(n-1),$$

la période est encore de quatre rangs et Vénus et Jupiter occupent des sommets.

Pour les rotations, enfin, en dehors du terme implicite provenant de la masse, il y a un terme périodique

$$\sin\frac{\pi}{2}(n-2),$$

dont la période est encore de quatre rangs, avec un décalage d'un rang sur le terme précédent.

Il semble donc bien qu'une même périodicité domine le phénomène qui a donné lieu à la formation des masses planétaires, à la production des excentricités, à l'établissement des durées de rotation et même à la distribution des densités. Cette périodicité serait de quatre rangs. Il convient d'en rechercher la cause.

Rappelons la conception de M. Belot qui sert de base à sa théorie cosmogonique. Un tube-tourbillon a existé à l'origine du système solaire dans la nébuleuse; ce tourbillon à rotation oblique était animé, dans la direction de son axe, d'une vitesse considérable que M. Belot évalue à $75\,000^{km}$ à la seconde, vers un point du ciel, l'apex. Il a heurté un nuage cosmique animé lui-même d'une vitesse de translation dans une autre direction, à angle droit avec celle du tourbillon. Sous le choc, le tube s'est mis à vibrer dans sa longueur et a présenté des ventres équidistants. Par l'effet de la rotation la matière du tube a quitté celui-ci au droit des ventres, en constituant autant de nappes évasées qui sont venues se résoudre en planètes dans un même plan, celui de l'écliptique.

M. Belot a calculé le profil des nappes en faisant une hypothèse sur la résistance du milieu, et il a trouvé que la courbe qui le repré-

sente est une courbe logarithmique. Il en déduit une loi des distances et une loi des inclinaisons des équateurs planétaires dont la vérification est satisfaisante, sauf cependant pour les deux dernières planètes, dites *rétrogrades*, dont la formation aurait eu lieu par un processus spécial. En dehors de ces deux lois formulées explicitement, M. Belot a déduit de sa théorie des considérations très générales sur les excentricités des orbites, qui ne sauraient constituer une loi. Il a encore, par l'effet d'autres considérations, formulé une loi des rotations que nous avons rappelée. Cet auteur n'a pas formulé de loi des masses, ce nom ne pouvant être donné aux considérations générales à l'aide desquelles il a expliqué la répartition de la matière pendant la condensation de la nébuleuse.

Si le phénomène d'émission des nappes était aussi simple que cela résulterait de son hypothèse, les masses varieraient d'une façon plus continue. Théoriquement elles seraient égales ou, mieux, diminueraient en allant vers le Soleil suivant une loi logarithmique, au lieu de présenter des maxima et des minima. De même pour les excentricités et les densités, on aurait plus d'uniformité dans les résultats des mesures effectuées.

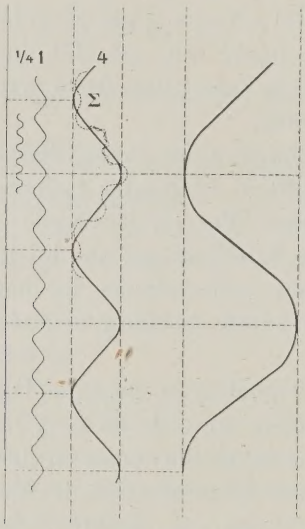
On est naturellement conduit à penser que la périodicité de quatre rangs qui vient se greffer sur celle du rang lui-même est due à un harmonique, en l'espèce la double octave en dessous, de la vibration simple envisagée d'abord. La production des harmoniques est un fait tellement général en pratique, que, dans le cas présent, son hypothèse s'impose. La vibration fondamentale n'est pas connue, mais les mesures nous révèlent un premier harmonique à période de quatre rangs, puis un harmonique à période d'un rang; enfin, sans doute, on a, continuant dans cet ordre d'idées, un harmonique tertiaire, double octave en dessus du précédent, qui correspond à un quart de rang.

On doit, d'autre part, considérer que le tube-tourbillon n'est pas homogène dans son épaisseur. Il y a à l'intérieur une couche cylindrique constituée par des hélices à rotation lente, et où la matière la plus dense s'est portée; tout autour sont des couches constituées par des hélices enroulées annulairement sur les précédentes : la matière y diminue de densité. La couche intérieure, plus dense et plus rigide, a dû vibrer selon les harmoniques que nous avons indiqués, mais les couches moins denses ont correspondu à des vibrations plus graves parmi lesquelles a dû se trouver notamment l'octave en dessous de la

plus grave des précédentes, correspondant à une période de huit rangs.

Si nous nous en tenons pour l'instant à la partie intérieure du tube-tourbillon, nous voyons que la vibration, au lieu d'être figurée, comme l'a fait M. Belot par une sinusoïde simple (*Essai de Cosmogonie tourbillonnaire*, *fig.* 10), doit être représentée par une onde

Fig. 10.



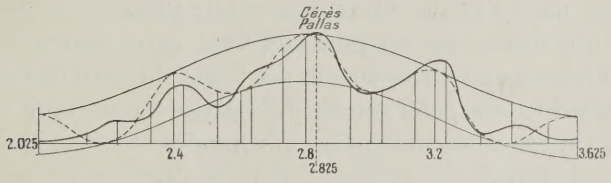
sinusoïdale composée Σ comportant une oscillation principale de période égale à quatre rangs avec comme harmoniques sa double octave en dessus, et la double octave en dessus de celle-ci, avec des périodes d'un rang et d'un quart de rang (*fig.* 10).

8. LES HARMONIQUES ET LES ASTÉROÏDES.

L'émission de la matière a eu lieu au droit des ventres, avec une intensité dépendant de l'ampleur de la vibration totale au point considéré, et croissant avec elle. Chaque rang a donc en général correspondu à quatre émissions, et par suite, théoriquement, à quatre nappes, ou mieux, à une nappe moyenne plus importante située entre des nappes d'importance décroissante de chaque côté. La dis-

persion des quatre émissions a été maximum vers les points d'inflexion de l'onde primaire regardant vers l'apex. C'est donc en ces points que les quatre émissions ont eu le plus de difficultés à se grouper en une même nappe. En fait, si l'on place Jupiter à un sommet de cette onde primaire, ainsi que la considération des masses y conduit, on observe que les points d'inflexion en question correspondent aux Astéroïdes, à Mercure et à Neptune. On ne doit donc pas être surpris de ce que les nappes des Astéroïdes ne se soient pas résolues en une planète unique. Bien plus, on a observé que les Astéroïdes sont groupés en ondes ou anneaux successifs qui corres-

Fig. 11.



pondent assez exactement à l'onde composée résultant des sinusoïdes secondaire et tertiaire (*fig.* 11). On a ainsi une explication très simple de la formation de ces ondes d'Astéroïdes étudiées par M. de Freycinet. L'existence de l'harmonique tertiaire a été mise en évidence par M. Belot (*Cosm. tourb.*, p. 137) comme cause de la distribution des Astéroïdes, mais l'idée nouvelle de l'harmonique primaire vient aujourd'hui compléter cette théorie en expliquant pourquoi le groupement des nappes a été plus difficile au cinquième rang, au premier et au neuvième, qu'à tous les autres.

En ce qui concerne le neuvième rang, il est incontestable que les nappes ont donné lieu à une planète qui est Neptune; cependant les écarts que nous avons relevés pour Neptune dans les lois empiriques font penser que peut-être cette planète n'a pas condensé toute la masse des nappes tertiaires, et il n'est pas impossible qu'elle soit accompagnée d'un anneau supérieur et d'un anneau inférieur de petits astres qui ont pu passer inaperçus jusqu'à maintenant à cause de leur éloignement quinze fois plus grand que pour les Astéroïdes.

Du côté de Mercure est une difficulté d'un autre ordre : le voisinage du Soleil rend l'observation très difficile. Peut-être faut-il voir

dans la lumière zodiacale la manifestation des anneaux ambiants de cette planète.

En résumé, on peut dire que la double hypothèse des harmoniques primaire (quatre rangs) et tertiaire (quart de rang) donne une explication complète, bien que sommaire, de l'ensemble de constatations auquel on pourrait donner le nom de *loi de répartition des Astéroïdes*.

9. L'HARMONIQUE DES DENSITÉS.

La périodicité de la densité, loin d'être un fait artificiel, se rattache directement aux conceptions qui précèdent.

Comme nous l'avons dit, autour d'une gaine constituée par la matière très dense, est un tube constitué par la matière légère ; le triage se faisant automatiquement par l'effet du mouvement de rotation. Quand le tube subit son choc, la partie rigide reçoit les vibrations que nous avons indiquées, qui donnent lieu à l'émission des nappes successives du système. Mais la partie extérieure, moins rigide, qui a cependant pénétré en grande partie dans le nuage cosmique, donne lieu à une vibration beaucoup plus ample que la vibration composée Σ, et avec une période plus grande. La densité de la planète résultera de la proportion de matière enlevée à chacune des gaines successives de densité différente. Nous supposons, pour simplifier, qu'il n'y a que deux matières différentes (*fig.* 12); l'une de densité Δ, considérable, l'autre de densité δ, très faible. Si l et m sont les volumes enlevés, et d la densité résultante, on aura

$$d = \frac{l\Delta + m\delta}{l + m};$$

admettons, pour simplifier encore, que l soit négligeable devant m, mais que, grâce à la différence des densités, $l\Delta$ soit néanmoins prépondérant au numérateur; on aura, en gros,

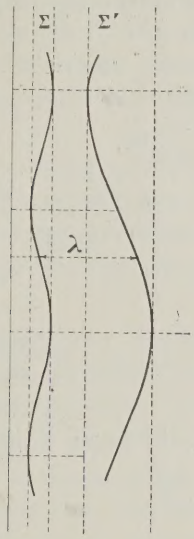
$$d = \frac{l}{m}\Delta.$$

Or m est sensiblement proportionnelle à la masse entraînante l, et à la surface sur laquelle s'opère l'entraînement, surface qui est celle de la nappe à l'intérieur de l'onde Σ', et qui est par suite, en

négligeant Σ devant celle-ci, proportionnelle à la surface d'un cercle de rayon λ, λ étant l'ordonnée de Σ′ (*fig.* 12). On peut donc poser, Δ étant constant,

$$d = k\lambda^2,$$

Fig. 12.



et comme

$$\lambda = a - b\cos(\alpha + \beta n),$$

on a

$$\sqrt{d} = \frac{1}{a' - b'\cos(\alpha + \beta n)},$$

si l'on tient compte de ce que a' est notablement plus grand que b', on voit que l'on peut enfin écrire

$$\sqrt{d} = \mathrm{A} + \mathrm{B}\cos(\alpha + \beta n),$$

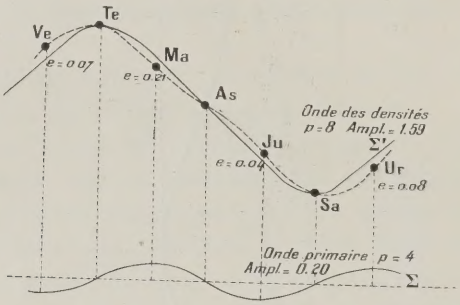
c'est précisément la formule empirique que nous avons trouvée. En laissant de côté les hypothèses simplificatrices que nous avons admises, et qui nous amènent à la forme même de cette loi, on voit en tout cas que la périodicité de la densité planétaire s'impose d'une manière évidente.

On peut même perfectionner la loi trouvée en tenant compte de ce que λ est la différence entre les coordonnées de Σ′ et de Σ. On voit

qu'autour de la sinusoïde des densités, celles-ci doivent se trouver alternativement de part et d'autre, suivant un harmonique qui serait l'octave et qui correspond à Σ.

L'examen de la figure 4 montre en effet que Mars est au-dessous de la courbe ainsi qu'Uranus, alors que Vénus et Jupiter sont au-dessus (*fig.* 13). L'écart moyen de $\sqrt{d}$ pour ces planètes est 0,10.

Fig. 13.



On en conclut que l'amplitude de l'onde des densités est huit fois celle de l'onde primaire : $\frac{1,59}{0,20} = 8$.

10. LES HARMONIQUES ET LES MASSES.

Ainsi que nous l'avons déjà indiqué, si le tube n'avait donné lieu qu'à une vibration simple à période d'un rang, tous les ventres auraient eu la même amplitude et la diminution de la masse du tube irait en progression géométrique décroissant en se rapprochant du Soleil; la masse des planètes varierait suivant une loi logarithmique au lieu de présenter des oscillations.

La quantité de matière émise à chaque rang pour la nappe quadruple dépend : 1° de l'amplitude de la vibration totale au point considéré; 2° de la masse du tube en ce point.

Le tube-tourbillon s'épuise à chaque émission et l'on conçoit que dans ces conditions, toutes choses égales d'ailleurs, la masse des nappes diminue en allant vers le Soleil.

Ainsi donc, à s'en tenir à la partie dense du tube, on voit déjà que les masses émises successivement obéissent à une loi représentée par

une sinusoïde Z, dont les ordonnées correspondent à une certaine puissance de celle de la sinusoïde Σ; la sinusoïde Z étant comprise entre deux courbes logarithmiques L et L'.

Il faut y ajouter l'émission de la matière légère provenant :

1° Des ventres de l'onde Y des densités, qui a une période double de l'harmonique primaire. Un de ces ventres correspond à la région Jupiter, Saturne, Uranus. Cet effet tend à augmenter la masse émise au sixième rang. Il est encore, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnel à une certaine puissance de l'ordonnée ventrale de l'onde en question;

2° De l'entraînement de la matière légère par la matière dense au droit de toutes les nappes, ainsi que nous l'avons indiqué pour les densités. Comme pour les termes précédents, la masse ainsi obtenue est encore proportionnelle à une puissance de la distance à l'axe de la courbe Σ.

En additionnant tous ces effets, on obtient une onde résultante Ω qui a l'allure générale de Σ avec toutefois cette modification que les sommets sont considérablement surélevés dans la partie centrale correspondant au sixième rang : la courbe est comprise entre deux enveloppes qui, vers la partie avant, sont sensiblement des courbes logarithmiques, mais qui, au milieu et en arrière, sont, surtout pour l'enveloppe inférieure, déformées comme la sinusoïde des densités, c'est-à-dire avec une tendance ventrale. La figure 14 met en évidence la composition des masses suivant Ω.

En transformant Ω suivant une certaine racine des ordonnées, on peut donc obtenir une courbe qui, sauf pour les planètes éloignées, aura sensiblement l'allure d'une sinusoïde régulière, de période égale à 4, comprise entre deux droites convergeant vers un point de l'avant, et l'équation est évidemment

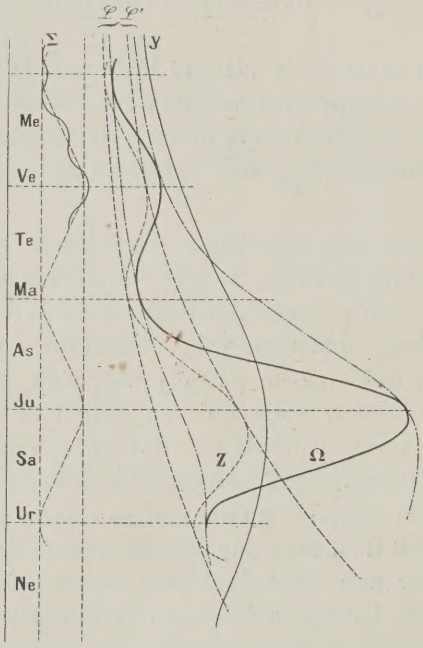
$$m^{\frac{1}{\alpha}} = a + (n+b)\left[c + d\sin\frac{\pi}{2}(en+f)\right],$$

ce qui correspond bien aux résultats auxquels nous sommes arrivé par la voie empirique.

Ainsi la loi empirique des masses, qui paraissait *a priori* une énigme, reçoit, sinon une démonstration, du moins une explication sommaire, mais très facile, grâce à l'appoint de l'hypothèse d'un harmonique primaire dans la théorie de M. Belot.

Cette théorie va même plus loin et, comme pour les densités, elle explique les faiblesses de la loi empirique formulée, en l'espèce l'écart de Neptune dont le point représentatif réel est bien au-dessous de celui que le schéma de la figure 8 donnerait. Cela tient en partie à la déformation ventrale des enveloppes L, L′ qui, en réalité, au-delà de Jupiter, se rapprochent de l'horizontale par l'effet de l'onde des densités. Cela tient aussi, et surtout, à ce que Neptune

Fig. 14.



n'a pas condensé toute la masse des quatre nappes du neuvième rang (un tiers environ seulement); cette planète est probablement accompagnée d'Astéroïdes (2 anneaux), comme nous l'avons déjà dit à propos des harmoniques des petites planètes.

Pour les Astéroïdes au cinquième rang, la formule des masses donnerait M = 10 environ. La plus grosse de ces planètes atteint $\frac{1}{50}$ de la masse de la Terre. Il est probable qu'une partie importante de la masse des nappes du cinquième rang a été captée par Jupiter; c'est naturellement la partie la plus légère; il en résulte que la den-

sité des Astéroïdes doit être plus forte que la valeur donnée par la loi des densités (2,53). C'est bien ce que les mesures effectuées paraissent indiquer.

11. LES HARMONIQUES ET LES EXCENTRICITÉS.

Si le tube-tourbillon venait frapper avec une rotation normale un nuage cosmique immobile, les nappes seraient coupées par le plan de l'écliptique suivant des cercles et il n'y aurait que des orbites circulaires. Mais le tube a attaqué le nuage en rotation oblique pour y pénétrer; d'autre part le nuage lui-même avait une vitesse propre normale au plan de symétrie du tube. La vitesse du tube évaluée par M. Belot à 75000^{km} à la seconde a été réduite à environ 20^{km}. La vitesse de translation du nuage est de 50^{km} environ.

Deux causes ont contribué à excentrer les nappes, ainsi que M. Belot l'a mis en évidence :

1° La résistance du milieu eu égard à la vitesse du tube-tourbillon;

2° La vitesse du nuage.

Examinons séparément ces deux effets qui, en réalité, se composent.

Le premier effet est comparable à la réfraction d'un faisceau lumineux. Celle-ci doit tendre à s'allonger davantage à mesure que la nappe est plus éloignée de l'axe, et l'aplatissement se fait dans un sens perpendiculaire au plan de la figure. La courbe Ψ représente schématiquement cette variation (*fig.* 15).

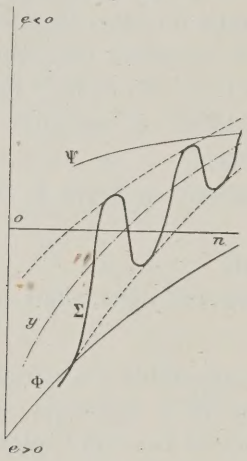
Le deuxième effet est analogue, mais dans une direction à 90° de la précédente; il tend au contraire à aplatir l'orbite dans l'autre sens, mais cet effet est très atténué vis-à-vis du précédent, car il agit sur la tranche de la nappe au périhélie au lieu d'agir comme l'autre sur la surface latérale de celle-ci.

A cet effet, il faut ajouter l'influence de la vitesse de rotation de la nappe qui se compose avec la vitesse de translation du nuage cosmique. M. Belot attribue une importance considérable à ce terme qui tend au surplus, près du centre, à tordre l'orbite dans l'écliptique en déplaçant le grand axe, ce qui est la cause de l'excentricité considérable de Mercure.

On doit donc tenir compte aussi d'une excentricité de signe contraire à celle qui résulte du premier effet; elle est représentée par une courbe Φ située en entier au-dessous de Ox, avec une ordonnée considérable à l'origine.

La résultante de Φ et Ψ est une courbe Y qui serait la courbe réelle des excentricités si toutes les nappes étaient dans des conditions analogues de résistance au milieu. Ce n'est pas le cas, car cette résistance diminue à mesure que l'inertie de la nappe est plus grande, et augmente au contraire à mesure que cette nappe offre plus de prise au milieu. C'est un phénomène de balistique qui se passe : un projec-

Fig. 15.



tile est d'autant moins dévié par le vent que sa masse est plus grande et que sa surface est plus petite.

On voit donc qu'autour de la ligne Y doivent se produire des variations correspondant à celles du rapport de la surface des nappes à leur masse. Cette surface varie comme les distances planétaires ou, au maximum, comme le carré de la dimension linéraire. La masse suit la loi sinusoïdale que nous avons reconnue, c'est-à-dire qu'en moyenne elle est proportionnelle à la huitième puissance du rang; elle croît donc plus vite que le carré de la distance. On en conclut que les variations de l'excentricité sont constituées par des oscillations avec période de quatre rangs autour de Y, dont l'amplitude va en diminuant quand on s'éloigne du Soleil.

Nous arrivons ainsi, par un raisonnement sommaire, à une explication très simple de l'allure de la courbe trouvée empiriquement. On y trouve surtout la justification de la considération d'excentricités négatives qui, *a priori*, paraît tout à fait arbitraire, et à laquelle nous avions été amené à la suite de longues recherches, avant d'en soupçonner l'explication.

Nous n'avons pas tenu compte de causes secondaires comme la variation de la densité, qui intervient dans la résistance du milieu à raison de la relation qui lie la masse aux dimensions; on conçoit ainsi que pour les planètes éloignées où la densité est faible vis-à-vis des autres, notamment pour Jupiter qui est de beaucoup la plus grosse, la résistance soit plus forte que ne l'indiquerait notre raisonnement; il intervient un facteur correspondant à l'onde des densités; cela se traduit par une augmentation de l'effet produit pour Jupiter; c'est pourquoi le point réel représentatif de cette planète est au-dessus de la courbe Σ dans la figure 6. On a vu comment nous avons pu corriger cet écart, en particulier en portant la période à quatre rangs et demi.

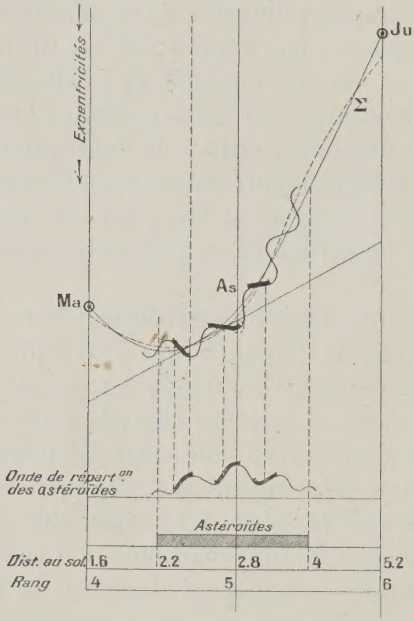
Considérons maintenant plus spécialement le cas des petites planètes. Le diagramme de la figure 6, que nous reproduisons figure 16 pour la partie concernant les Astéroïdes, montre nettement que l'excentricité de ceux-ci, qui sont compris entre les distances 2,2 et 4, doit aller en moyenne en diminuant. C'est bien la loi qui a été vérifiée pour les Astéroïdes voisins de l'écliptique. Mais il y a mieux. L'onde Σ des excentricités n'est pas simple. Elle présente naturellement les harmoniques du tube-tourbillon, qui ont une répercussion sur les nappes et qui commandent, comme on l'a vu, la répartition des masses : une ondulation secondaire figurée en pointillé avec période d'un rang et une onde tertiaire avec période d'un quart de rang.

Il apparaît clairement que, tout en diminuant en moyenne, les excentricités suivent une loi sinusoïdale qui fait que, par zones régulièrement espacées, l'excentricité est plus grande que dans les zones contiguës qui précèdent. La variation a lieu par ressauts. Il suffit de regarder le schéma pour voir que les zones inversées correspondent précisément aux parties montantes de la courbe de répartition des Astéroïdes, en allant vers Jupiter. C'est là tout le secret de cette curieuse loi des alternances des excentricités qui a été reconnue par M. de Freycinet en 1900 et qui peut s'énoncer ainsi :

Les excentricités des Astéroïdes voisins de l'écliptique vont en moyenne en diminuant de Mars vers Jupiter, mais la diminution a lieu par ressauts successifs, et les régions qui ont une excentricité plus forte que celles qui les précèdent immédiatement correspondent aux rampes montantes de la courbe de répartition des Astéroïdes, en allant vers Jupiter.

Les variations séculaires des excentricités ont probablement une

Fig. 16.



cause analogue à celles des variations séculaires des autres éléments. Cependant il est curieux de remarquer que l'amplitude de l'écart pour chaque planète est en gros une fonction linéaire du rang ainsi que nous l'avons constaté empiriquement, le vertex étant conservé.

12. LES HARMONIQUES ET LES ROTATIONS.

C'est le laminage de la matière à l'intérieur de chaque nappe entre les couches concentriques animées de vitesses légèrement différentes, ou entre les nappes tertiaires quand celles-ci n'ont pas fusionné dès

l'émission, et la dissymétrie provenant de la vitesse de translation du nuage cosmique, qui produisent un tourbillon secondaire, lequel se traduit finalement par la constitution d'une planète. M. Belot a montré que, toutes choses égales d'ailleurs, une masse plus grande doit tourner plus vite. En effet elle attire plus fortement les masses ambiantes et c'est de la différence de vitesses de ces couches ambiantes qu'elle tire sa rotation : elle leur emprunte une force vive plus grande, donc elle doit tourner plus rapidement. D'autre part, toutes choses égales d'ailleurs, deux planètes de diamètres différents, mais de même masse, ne doivent pas avoir des vitesses de rotation très différentes; en effet, si la différence de vitesse au contact des couches entre lesquelles elles roulent est proportionnelle au diamètre, le chemin parcouru à la périphérie de la planète l'est aussi, par suite, la vitesse angulaire de rotation ne doit pas varier beaucoup.

On est donc conduit à penser, en faisant abstraction des causes secondaires, que la durée de rotation est inversement proportionnelle à une certaine puissance de la masse. Parmi les circonstances secondaires est précisément la variation de la vitesse entre couches voisines d'une même nappe, c'est-à-dire en somme de la dispersion de la nappe en épaisseur. Il est clair qu'à égalité de masse et de diamètre, en un même point, la vitesse de rotation sera d'autant plus grande que la nappe sera plus mince, ou plutôt aura été moins étalée en épaisseur. Or, au moment de l'émission, le maximum de dispersion a lieu aux points d'inflexion de l'onde primaire, regardant vers l'apex, et dans les autres parties les nappes sont plus resserrées ou ont plus de tendance à se grouper. La durée de rotation doit donc dépendre aussi d'un facteur sinusoïdal S à période de quatre rangs, qui va en s'amortissant, l'éloignement des nappes tendant à uniformiser leur dispersion en épaisseur, et qui est tel que la région des Astéroïdes-Jupiter corresponde à un sommet. En définitive, on voit sommairement que l'on doit avoir

$$T = S.M^{-\alpha};$$

c'est précisément la forme de la relation empirique que nous avons trouvée.

13. LES HARMONIQUES ET LES DISTANCES PLANÉTAIRES.

Ainsi, comme pour les Astéroïdes, les masses, les densités et les excentricités, l'hypothèse des harmoniques du tube-tourbillon donne une explication simple pour les durées de rotation. Il n'est pas jusqu'à la loi des distances formulée par M. Belot, où ces harmoniques n'apparaissent. Cette formule est l'une des plus parfaites; elle donne les résultats suivants :

Planètes.	Distance calculée.	Distance observée.
Mercure	0,30	0,387
Vénus	0,67	0,72
Terre	1,017	1,00
Mars	1,668	1 523
Cérès	2,893	2,75
Jupiter	5,201	5,203
Saturne	9,546	9,539
Uranus	17,728	19,183 (rétrogr.)
Neptune	33,133	30,055 (»)

Il n'y a guère à tenir compte des deux dernières planètes qui sont rétrogrades et qui correspondent, selon M. Belot, à une formation d'après un processus spécial.

La formule a été calculée pour satisfaire au cas de la Terre et à celui de Jupiter et de Saturne. Or, dans l'hypothèse d'un harmonique primaire, à période de quatre rangs, on a vu que ces planètes correspondent aux régions ventrales. Les nappes qui leur ont donné naissance ont donc, toutes choses égales d'ailleurs, eu un point de départ plus éloigné de l'axe du tube-tourbillon que les nappes de Mercure, de Mars ou de Cérès. Aussi bien, les résultats sont-ils notablement trop forts pour les distances de ces planètes.

Non seulement l'hypothèse des harmoniques justifie les lois des Astéroïdes et les lois empiriques que nous avons formulées, tout en expliquant leur imperfection quand il y a lieu, mais encore elle explique et justifie les faiblesses de la formule des distances donnée par M. Belot, dont les écarts nous fournissent ainsi un moyen de mesurer l'amplitude de l'onde primaire.

Cet auteur nous indique que le rayon du tube-tourbillon était 0,28, soit 60 rayons solaires. La figure 17 montre facilement que, si ε est

l'écart des distances et ρ l'amplitude ventrale de l'onde primaire, on a

$$\varepsilon = \rho \frac{\cos(I - \beta)}{\cos \beta},$$

β étant l'inclinaison de l'équateur et I celle de l'écliptique (28°).

Dans le cas de Mars, on a

$$\varepsilon = 0,145,$$
$$\beta = 23° ;$$

on en déduit

$$\rho = 0,133.$$

Dans le cas de Cérès, on a

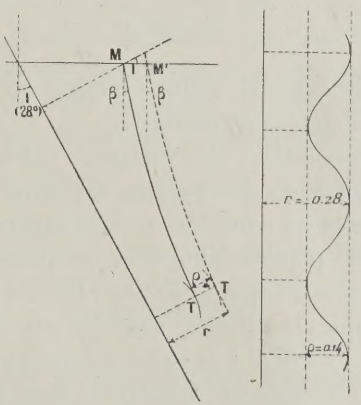
$$\varepsilon = 0,137,$$
$$\beta = 16° ;$$

d'où

$$\rho = 0,135.$$

On en conclut que la vibration ventrale du tourbillon a une ampli-

Fig. 17.



tude sensiblement égale à la moitié du rayon extérieur. La présence de la matière planétaire jusqu'à une distance de 0,14 ou 0,15 du Soleil est donc possible.

Cherchons maintenant quelle est l'amplitude de la vibration secondaire. S'il s'agissait non d'un tube vibrant mais d'une tige ou d'une génératrice isolée, l'amplitude varierait comme le cube de l'élongation, en admettant l'analogie avec les flèches des poutres de même

section, et l'on aurait

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64};$$

mais il y a un facteur de réduction provenant de ce que la vibration est gênée par le resserrement de la section du cylindre. Si l'on considère ρ comme très petit, on voit que la gêne est proportionnelle à $\frac{\rho}{R}$ et que, par suite, il faut introduire un facteur correctif $\frac{R-\rho}{R}$. On doit donc avoir sommairement

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{1}{64}\,\frac{R-\rho'}{R-\rho},$$

d'où

$$\rho' = \frac{R\rho}{64(R-\rho)+\rho};$$

dans le cas actuel, en rayons solaires, on a

$$R = 60,$$
$$\rho = 30;$$

on en déduit

$$\rho' = 0,92,$$

soit environ 1.

Or, un calcul direct de M. Belot a montré que ρ' est égal au rayon solaire. Il y a en somme concordance.

La formule exponentielle des distances est basée sur l'hypothèse que la force d'expansion des nappes est proportionnelle à $r - R$, r étant le rayon au point considéré et R le rayon du tube, c'est-à-dire à peu près, pour les planètes éloignées, proportionnelle à r.

La vérification montre que pour les planètes très éloignées, pour Neptune par exemple, la distance calculée est trop forte, autrement dit que l'hypothèse relative à la force d'expansion correspond à une valeur trop grande de celle-ci. Admettons donc que, pour les régions éloignées, la force d'expansion ne soit plus proportionnelle à r, mais à r^α, α étant plus petit que l'unité. On aura, pour l'équation de la nappe dans la partie considérée,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{k}{x^\alpha}$$

au lieu de

$$\frac{dz}{dx} = \frac{k}{x-R};$$

on en déduit

$$z = k' + \frac{1}{1-a} x^{1-\alpha};$$

comme $k' = 0$, on aura

$$\lambda x = z^{\gamma}$$

ou

$$\frac{n^{\gamma}}{d} = \lambda$$

avec

$$\gamma = \frac{1}{1-\alpha};$$

on voit que la formule trouvée $\frac{n^4}{d}$ correspond à

$$\frac{1}{1-\alpha} = 4,$$

ou

$$\alpha = \frac{3}{4}.$$

Ainsi, il suffit que la force d'expansion soit non plus proportionnelle à x, mais seulement à $x^{\frac{3}{4}}$, pour que la loi limite soit démontrée. Cette relation, appelée *loi limite* parce qu'elle s'applique aux planètes extrêmes, devrait donc plutôt être appelée une *loi locale*, si ces deux mots ne juraient pas d'être accolés. En allant vers des régions plus éloignées encore, et admettant que α diminue, ce qui paraît plausible, on verrait que pour $\alpha = \frac{2}{3}$ c'est la formule $\frac{n^3}{d} = \text{const.}$ qui en résulte.

14. CONCLUSION.

Après ce qui précède, il n'est plus guère permis de douter du rôle important qu'ont joué dans la constitution du système solaire les harmoniques du tube-tourbillon, et notamment celui que nous avons appelé *harmonique primaire*, dont la période est de quatre rangs.

L'existence de l'onde primaire domine les lois des masses, des excentricités et des durées de rotation. Elle joue un rôle évident, sinon prépondérant, dans les lois des densités, des distances et des Astéroïdes, le rôle le plus important étant tenu par l'onde des densités, l'onde secondaire ou l'onde tertiaire.

Pour arriver non plus seulement à une explication sommaire, bien qu'assez complète des lois empiriques que nous avons formulées, mais à une véritable démonstration, il faudrait apporter, dans le problème général du choc originel, des éléments de précision concernant la résistance du milieu cosmique contre le tourbillon, la force d'expansion qui en résulte et la déformation en épaisseur des nappes.

Les hypothèses formulées par M. Belot à ce sujet : résistance proportionnelle au carré de la vitesse et force d'expansion inversement proportionnelle à la distance au tube-tourbillon, paraissent justifiées par la loi des distances dans les limites où celle-ci est applicable; ainsi que nous l'avons indiqué, elles cessent d'être vraies à partir d'une certaine distance. Le problème est, au fond, un problème de balistique : un projectile doué de rotation (c'est le cas général) fait explosion en entrant dans un milieu résistant et il se détruit en se déformant suivant une loi qui dérive des propriétés de la matière qui le constitue et de celle qui constitue le milieu pénétré.

L'étude des fluides et des résistances au mouvement des solides dans leur sein a été poussée très loin au siècle dernier, et cependant les expériences récentes exécutées dans l'air avec des surfaces planes en vue de l'application à l'aviation, ont donné lieu à des constatations inattendues. Dans le cas où le mobile est déformable ou fluide, le problème est beaucoup plus complexe et il est loin d'être approfondi.

Pour un problème en apparence des plus simples : le mouvement de l'eau dans un tuyau, les formules encore usitées aujourd'hui sont presque aussi empiriques que celles que nous avons données pour les masses, les excentricités ou les durées de rotation. Les cas sont, d'ailleurs, assez analogues : des raisonnements généraux permettent de prévoir les facteurs importants des formules; mais l'analyse ne peut guère aller, dans l'état actuel, jusqu'à établir les valeurs même des exposants.

Si une incertitude de cette nature règne pour des cas accessibles à toutes les vérifications expérimentales, et notamment pour des vitesses ordinaires, elle est bien excusable quand il s'agit de vitesses prodigieuses et de milieux mal connus, comme c'est le cas du problème de balistique cosmique qui a préludé à la formation du monde solaire.

Henri Poincaré terminait son bel Ouvrage sur les *Hypothèses cosmogoniques* par la phrase suivante :

« Si l'on peut reprocher à M. Belot d'avoir été un peu plus ambitieux qu'il ne convient de l'être dans l'état actuel de la Science et d'avoir voulu prématurément trop embrasser..., il semble qu'il peut être utile de faire connaître ses idées parce que l'on pourra un jour y trouver à glaner d'intéressantes vérités. »

La confiance témoignée par ces paroles à la conception tourbillonnaire était bien placée ; on en a une nouvelle preuve puisqu'il suffit d'y ajouter l'hypothèse d'harmoniques pour obtenir une ample moisson de résultats qu'aucune théorie cosmogonique n'avait pu produire jusqu'à maintenant : explication sommaire, mais simple, des lois des masses, des densités, des excentricités, des rotations ; explication des particularités des Astéroïdes et même des inégalités de la loi exponentielle des distances.

FIN

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

INTRODUCTION 1

1. Les distances planétaires 3
2. La loi des inclinaisons des équateurs planétaires 8
3. La loi des densités 12
4. La loi des excentricités 14
5. La loi des masses 18
6. La loi des rotations 21
7. La périodicité planétaire et les harmoniques 23
8. Les harmoniques et les Astéroïdes 26
9. L'harmonique des densités 28
10. Les harmoniques et les masses 30
11. Les harmoniques et les excentricités 33
12. Les harmoniques et les rotations 36
13. Les harmoniques et les distances planétaires 38
14. Conclusion 41

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
52668 Quai des Grands-Augustins, 55.

142611 Astron.
B.

Author Butavand, F.

Title Les lois empiriques du système solaire et

UNIVERSITY OF TORONTO
LIBRARY

Do not
remove
the card
from this
Pocket.

Acme Library Card Pocket
Under Pat. "Ref. Index File."
Made by LIBRARY BUREAU